一类时变时滞模糊细胞神经网络的时滞依赖指数稳定性判据

刘振伟[1,2], 张化光[1,2], 佟绍成[3]

(1. 东北大学流程工业综合自动化教育部重点实验室, 辽宁沈阳 110004;
2. 东北大学信息科学与工程学院, 辽宁沈阳 110004; 3. 辽宁工业大学数理系, 辽宁锦州 121001)

摘　要: 针对一类带有时变时滞的模糊细胞神经网络, 通过适当的构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 以线性矩阵不等式的形式提出了一种新颖的依赖于时滞的全局指数稳定性判据. 与之前结果相比, 所提出的判据针对模糊时滞项进行了变换, 从而首次考虑了模糊细胞神经网络中非模糊项的连接权矩阵中元素的符号问题, 降低了判据的保守性. 并且时滞变化率的限制将被放松. 仿真结果进一步证明了判据的有效性.

关键词: 模糊细胞神经网络; 时变时滞; 指数稳定; 时滞依赖; 线性矩阵不等式 (LMI)

中图分类号: TP183　　文献标识码: A　　文章编号: 0372-2112 (2009) 03-0513-06

Delay-Dependent Exponential Stability of Fuzzy Cellular Neural Networks with Time-Varying Delay

LIU Zhen-wei[1,2], ZHANG Hua-guang[1,2], TONG Shao-cheng[3]

(1. *Key Laboratory of Integrated Automation for the Process Industry, Ministry of Education, Shenyang, Liaoning* 110004, *China*;
2. *College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang, Liaoning* 110004, *China*;
3. *Department of Mathematics & Physics, Liaoning University of Technology, Jinzhou, Liaoning* 121001, *China*)

Abstract: The novel delay-dependent global exponential stability criteria are proposed for fuzzy cellular neural networks with time-varying delay. By constructing a new Lyapunov-Krasovskii functional, the criteria expressed by the form of linear matrix inequality (LMI) are given. Compared with the previous literature, the signs of elements of weighting matrix are first considered. Thus, the obtain results are less conservative. Moreover, the restriction of the time derivative of time-varying delays is released in the proposed criteria. The simulations are given to show the effectiveness of the criteria.

Key words: fuzzy cellular neural networks; time-varying delay; exponential stability; delay-dependent; linear matrix inequality (LMI)

1　引言

自从 1996 年, Yang 等[1,3]提出模糊细胞神经网络(FCNN)以来, 由于其在图像处理、模式识别等方面的广泛应用[2,16], 因此 FCNN 越来越受到重视. FCNN 是一种把模糊逻辑融入传统的细胞神经网络中, 并以此维持细胞之间的连接. 与普通的细胞神经网络不同, 在 FCNN 的模块输入和输出之中存在着模糊逻辑关系, 从而使 FCNN 在图像处理和模式识别方面得到了广泛的应用. 因此, 对 FCNN 稳定性的研究也变得更加重要了[3].

然而, 在神经网络的实现过程中, 时滞的存在是不可避免的. 因此, 关于时滞神经网络稳定性的研究已经成为了学术界的研究热点[4-6,14]. 近年来, 在时滞 FCNN 的稳定性研究上也已经取得了一定的成果. 如, 文献[7]和[8]使用M-矩阵技术, 证明了带有常数和时变时滞的 FCNN 的全局指数稳定性. 文献[9]中, 作者通过使用线性矩阵不等式(LMI)技术, 给出了时变时滞 FCNN 的全局指数稳定性结果. 文献[10]中, 作者使用了代数不等式技术, 证明了 FCNN 的指数稳定性. Chen 和 Zhao[11]研究了一种时滞随机 FCNN 的指数稳定性. 而Hou 等[12]人发展了一种新的 T-S 时滞模糊细胞神经网络, 并证明了其时滞依赖的全局指数稳定性. 但上面的文献中关于 FCNN 的稳定性结果, 全部采取了对非模糊项进行绝对值运算的方法, 因此在其连接权矩阵元素的符号问题上

收稿日期: 2007-06-22; 修回日期: 2008-12-15
基金项目: 国家自然科学基金(No. 60534010, 60572070, 60521003, 60774048, 60728307); 长江学者和创新团队发展计划; 以及高等学校学科创新引智计划(No. B08015)

都存在着保守性. 并且大部分没有考虑时滞变化率大于等于 1 时, 系统的稳定性情况.

本文针对一类时变时滞 FCNN 提出了一种新的基于LMI 的时滞依赖全局指数稳定性判据. 这个判据采用一种矩阵变换的方法, 将模糊时滞项转化为普通时滞项, 从而无须对非模糊项进行变换. 因此, 克服了目前文献中由于对非模糊项进行绝对值运算, 以至于忽略其连接权矩阵中元素的符号所带来的保守性. 并且判据也同时考虑了时滞变化率大于等于1 的情况. 仿真结果证明了本文所提判据的有效性.

2 系统描述

下面考虑如下的 FCNN 模型.

$$
\begin{aligned}
\dot z_i(t) = & -d_i z_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j + I_i \\
& + \bigwedge_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j(z_j(t-\tau(t))) + \bigwedge_{j=1}^{n} T_{ij} u_j \\
& + \bigvee_{j=1}^{n} \beta_{ij} f_j(z_j(t-\tau(t))) + \bigvee_{j=1}^{n} H_{ij} u_j
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中, α_{ij}, β_{ij}, T_{ij}和H_{ij}分别是模糊反馈 MIN 模块、模糊反馈MAX 模块, 模糊前馈 MIN 模块和模糊前馈 MAX 模块. a_{ij}和 b_{ij}分别是反馈模块和前馈模块. ∧和 ∨分别表示模糊AND 和模糊 OR 运算. z_i, u_i 和I_i 分别表示第i 个神经元中状态变量、输入变量和偏置量. $\tau(t)$表示传输时滞,f_i 表示激活函数, 且$f_i(z_i) = (|z_i+1| + |z_i-1|)/2$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. FCNN 的结构图[16]如图 1 所示.

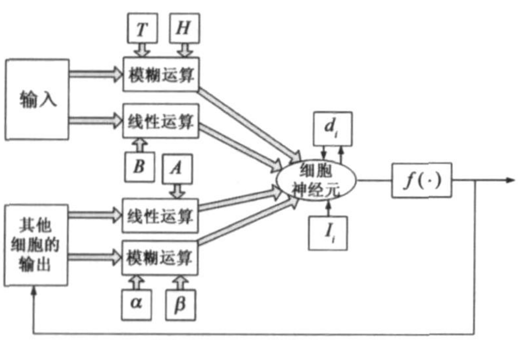

图1 FCNN的结构

为了得到稳定性结果, 我们给出了如下假设:

假设 1 激活函数f_i 有界, 且满足全局 Lipschitz 条件, 即总存在一个正数 l_i, 使得下面的表达式成立

$$|f_i(u) - f_i(v)| \leqslant l_i |u - v| \tag{2}$$

其中对于所有 $u, v \in \mathrm{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

假设 2 对于时滞项 $\tau(t)$, 满足 $0 \leqslant \tau(t) \leqslant \tau$, 且时滞变化率 $\dot\tau(t) \leqslant \mu$, 其中, τ和 μ为正数.

注 1: 目前大部分神经网络[1~12, 14~16]所使用的激活函数都满足假设 1, 如 $\tanh(u)$、$\frac{2}{\pi}\arctan\frac{\pi}{2}u$ 等. 在本文中, FCNN 的所采用的激活函数$f_i(u) = (|u+1| + |u-1|)/2$ 也满足这个假设, 因此假设是合理的并且是有意义的. 对于假设 2, 由于在神经网络中的时滞通常为有界的时变传输时滞, 因此我们给出了这个合乎于实际情况的假设. 目前的大部分文献都是采用满足这个假设的时变时滞 $\tau(t)$, 如[4, 7~10, 14]等.

本文中所用到的符号. $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{n\times n}$表示 $n\times n$ 维的实数矩阵, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$、$\lambda_M(\boldsymbol{B})$、$\lambda_m(\boldsymbol{B})$和 $\|\boldsymbol{B}\|$分别表示矩阵的转置、矩阵的最大特征值、矩阵的最小特征值及矩阵的范数, 其中 $\|\cdot\|$表示欧氏范数. $\boldsymbol{B} > 0$($\boldsymbol{B} < 0$)表示矩阵正定(负定), $|\boldsymbol{B}| = [|b_{ij}|]_{n\times n}$表示对由矩阵的每个元素的绝对值形成的矩阵.

3 时滞依赖的全局指数稳定性分析

在给出我们的主要结果之前, 先来介绍几个有关的定义和引理.

定义 对于系统(1), 存在正数 k 和$M \geqslant 1$, 使得下面的公式成立, 则说明系统是全局指数稳定的,

$$\|z(t) - z^*\| \leqslant M \|\phi\| e^{-kt} \tag{3}$$

其中, $\|\phi\| = \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} \|z(\theta) - z^*\|$, k 为指数收敛率, $z^* = [z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*]^{\mathrm{T}}$ 为系统(1)的平衡点.

引理 1[1,3] 令z 和z'分别为系统(1)的两个状态, 则有下面的公式成立:

$$\left|\bigwedge_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j(z_j) - \bigwedge_{j=1}^{n} \alpha_{ij} f_j(z_j')\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|\, |f_j(z_j) - f_j(z_j')| \tag{4}$$

$$\left|\bigvee_{j=1}^{n} \beta_{ij} f_j(z_j) - \bigvee_{j=1}^{n} \beta_{ij} f_j(z_j')\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\beta_{ij}|\, |f_j(z_j) - f_j(z_j')| \tag{5}$$

引理 2[12,13] 对于任意的常数矩阵 $\Omega > 0$, 及适当维数的可微向量 $\chi(t)$, 存在下面的不等式成立:

$$
\begin{aligned}
& \left[\int_{t-\tau(t)}^{t} \dot\chi(s)\,\mathrm{d}s\right]^{\mathrm{T}} \Omega \left[\int_{t-\tau(t)}^{t} \dot\chi(s)\,\mathrm{d}s\right] \\
& \leqslant \tau(t) \int_{t-\tau(t)}^{t} \dot\chi^{T}(s)\, \Omega \dot\chi(s)\,\mathrm{d}s \\
& \leqslant \tau \int_{t-\tau(t)}^{t} \dot\chi^{T}(s)\, \Omega \dot\chi(s)\,\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{6}
$$

引理 3[14] 对于任意向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathrm{R}^n$, 有下面不等式成立

$$2\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \leqslant \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{7}$$

其中, $\boldsymbol{X}$ 为任意正定矩阵, 即 $\boldsymbol{X} > 0$.

引理 4[15] 给定任意两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathrm{R}^n$, 则存在两个适维矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} > 0$, 两个常数 $m > 0$、$n > 0$, 使得下式成立

$$-m\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{a} + 2n\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \leqslant n^2\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(m\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} \tag{8}$$

引理 5 给定任意向量 $\boldsymbol{a} \in \mathrm{R}^n$, 则存在一个适维方阵 $\boldsymbol{X}$, 使得下式成立

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{a} \leqslant n\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}|\hat{\boldsymbol{X}}|^{\mathrm{T}}|\hat{\boldsymbol{X}}|\boldsymbol{a} \tag{9}$$

其中 $|\hat{X}| = \mathrm{diag}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_{i1}|, \sum_{i=1}^{n}|x_{i2}|, \cdots, \sum_{i=1}^{n}|x_{in}|\right)$, n 为向量维数.

证明　由式(9)左边可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{a} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{2}a_{j}^{2} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}2x_{ij}a_{i}\sum_{j=i+1}^{n}x_{lj}a_{i}\sum_{j=i+1}^{n}x_{lj}a_{j} \\ &\leqslant n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{2}a_{j}^{2}\end{aligned}$$

又由于式(9)右边

$$\begin{aligned} na^{\mathrm{T}}|\hat{\boldsymbol{X}}|^{\mathrm{T}}|\hat{\boldsymbol{X}}|a &= n\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_{ij}|\right)^{2}a_{j}^{2} \\ &\geqslant n\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}^{2}a_{j}^{2} = n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{2}a_{j}^{2}\end{aligned}$$

由此, 式(9)成立, 引理得证.

为了推导方便, 我们对 FCNN 进行坐标变换. 设 $z^{*} = [z_1^{*}, z_2^{*}, \cdots, z_n^{*}]^{\mathrm{T}}$ 为系统(1)的平衡点, 令 $x(\bullet) = z(\bullet) - z^{*}$, 则可等到变换后的模型如下:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) = &-d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n}a_{ij}g_j(x_j(t)) \\ &+ \bigwedge_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j(x_j(t-\tau(t)) + z_j^{*}) - \bigwedge_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j(z_j^{*}) \\ &+ \bigvee_{j=1}^{n}\beta_{ij}f_j(x_j(t-\tau(t)) + z_j^{*}) - \bigvee_{j=1}^{n}\beta_{ij}f_j(z_j^{*}) \qquad (10)\end{aligned}$$

或矩阵形式

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = &-Dx(t) + Ag(x(t)) + \bigwedge_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j(x_j(t-\tau(t)) + \\ &z_j^{*}) - \bigwedge_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f_j(z_j^{*}) \\ &+ \bigvee_{j=1}^{n}\beta_{ij}f_j(x_j(t-\tau(t)) + z_j^{*}) - \bigvee_{j=1}^{n}\beta_{ij}f_j(z_j^{*}) \qquad (11)\end{aligned}$$

其中, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]$, $g_j(x_j(t)) = f_j(x_j(t) + z_j^{*}) - f_j(z_j^{*})$ 且带有 $g_j(0) = 0$, $\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(x(t)) = [g_1(x_1(t)), g_2(x_2(t)), \cdots, g_n(x_n(t))]$, $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$, $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$, 我们可以看出当系统(10)或(11)为全局指数稳定时, 则系统(1)也为全局指数稳定.

下面我们来介绍, 我们所得到的关于时变时滞 FCNN 的时滞依赖全局指数稳定性判据.

定理 1　在假设 1 和 2 的条件下, 给定正数 k, 存在正定对角矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{Y}$, 正定对称矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$ 和 $\boldsymbol{Z}$, 及正数 m, 使下面的矩阵不等式(12)成立, 则系统(10)或(11)是全局指数稳定,

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & e^{-2k\tau}Z & 0 & PA-DR & 0 & \Psi_{17} \\ * & \Psi_{22} & e^{-2k\tau}Z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Psi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -YA^{\mathrm{T}}R & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \Psi_{55} & \Psi_{56} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\dfrac{m}{n}I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\dfrac{m}{n}I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

其中, $\Psi_{11} = 2kP - 2PD + Q_1 + Q_2 - e^{-2k\tau}Z + LYL$, $\Psi_{17} = P(|\alpha|_S + |\beta|_S)$, $\Psi_{22} = -(1-\mu)e^{-2k\tau}Q_1 - 2e^{-2k\tau}Z + 2mLL$, $\Psi_{33} = -e^{-2k\tau}Q_2 - e^{-2k\tau}Z$, $\Psi_{55} = \tau^2 Z - 2R$, $\Psi_{56} = R(|\alpha|_S + |\beta|_S)$, $\boldsymbol{L} = \mathrm{diag}(l_i)$, $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_i)$, $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$, $|\alpha|_S = \mathrm{diag}\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_{i1}|, \sum_{i=1}^{n}|\alpha_{i2}|, \cdots, \sum_{i=1}^{n}|\alpha_{in}|\right)$, $|\beta|_S = \mathrm{diag}\left(\sum_{i=1}^{n}|\beta_{i1}|, \sum_{i=1}^{n}|\beta_{i2}|, \cdots, \sum_{i=1}^{n}|\beta_{in}|\right)$, $\boldsymbol{I}$ 为单位阵, $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

证明　我们可以明显地看出, 只要证明系统(10)或(11)是全局指数稳定的, 则系统(1)也是全局指数稳定的. 因此为证明系统(10)或是(11)的稳定性, 我们选取以下 Lyapuonv-Krasovskii 泛函,

$$V(x(t)) = V_1(x(t)) + V_2(x(t)) + V_3(x(t)),$$

其中,

$$V_1(x(t)) = \mathrm{e}^{2kt}\sum_{i=1}^{n}p_i x_i^2(t) \qquad (13)$$

$$\begin{aligned}V_2(x(t)) = &\int_{t-\tau(t)}^{t}\mathrm{e}^{2ks}(x^{\mathrm{T}}(s)Q_1x(s) \\ &+ g^{\mathrm{T}}(x(s))Q_2g(x(s)))\mathrm{d}s \qquad (14)\end{aligned}$$

$$V_3(x(t)) = \tau\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\mathrm{e}^{2ks}x^{\mathrm{T}}(s)Zx(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \qquad (15)$$

其中, $\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}(p_i)$ 且 $p_i > 0$, $\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}} > 0$, $\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{Q}_2^{\mathrm{T}} > 0$, $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}} > 0$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

对泛函(13)沿着时间 t 求导, 并根据引理 1, 得,

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(x(t)) \leqslant\, &2ke^{2kt}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Px(t) - 2e^{2kt}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PDx}(t) \\ &+ 2e^{2kt}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{PAg}(x(t)) + 2e^{2kt}|\boldsymbol{x}(t)|^{\mathrm{T}} \\ &\boldsymbol{P}(|\alpha| + |\beta|)|g(x(t-\tau(t)))| \qquad (16)\end{aligned}$$

对泛函(14)沿着时间 t 求导, 并根据假设 2, 得,

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(x(t)) \leqslant\, &e^{2kt}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_1x(t) + e^{2kt}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_2x(t) \\ &- e^{2kt}e^{-2k\tau}(1-\mu)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t)) \\ &\bullet\boldsymbol{Q}_1x(t-\tau(t)) - e^{2kt}e^{-2k\tau}x^{\mathrm{T}}(t-\tau) \\ &\bullet\boldsymbol{Q}_2x(t-\tau) \qquad (17)\end{aligned}$$

对泛函(15)沿着时间求导, 并根据引理 2 及 Newton-Leibniz 公式, 得,

$$\begin{aligned}\dot{V}_3(x(t)) \leqslant\, &\tau^2 e^{2kt}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Zx}(t) - e^{2kt}e^{-2k\tau}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Zx(t) \\ &+ 2e^{2kt}e^{-2k\tau}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Zx}(t-\tau(t)) - 2e^{2kt}e^{-2k\tau} \\ &\bullet\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{Zx}(t-\tau(t)) \\ &+ 2e^{2kt}e^{-2k\tau}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{Zx}(t-\tau) \\ &- e^{2kt}e^{-2k\tau}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\boldsymbol{Zx}(t-\tau) \qquad (18)\end{aligned}$$

从(2)可知,

$$\boldsymbol{g}_i^2(x_i(t)) \leqslant l_i^2 x_i^2(t),\ i = 1, 2, \cdots, n \qquad (19)$$

$$\boldsymbol{g}_i^2(x_i(t-\tau(t))) \leqslant l_i^2 x_i^2(t-\tau(t)),\ i = 1, 2, \cdots, n \qquad (20)$$

令矩阵 $\boldsymbol{Y} = \mathrm{diag}(y_1, y_2, \cdots, y_n) > 0$ 和常数 $m > 0$, 并且

由式(19)和式(20), 我们可以得到下式

$$0\leqslant -e^{-2kt}\sum_{i=1}^{n}y_i\left(g_i^2(x_i(t))-l_i^2x_i^2(t)\right)-2e^{2kt}\sum_{i=1}^{n}m\left(g_i^2(x_i(t-\tau(t)))-l_i^2x_i^2(t-\tau)\right)\quad(21)$$

另外, 存在正定对角矩阵 $\boldsymbol{R}=\mathrm{diag}(r_1,r_2,\cdots,r_n)>0$, 并根据引理1, 则有下面公式成立

$$\begin{aligned}0\leqslant &-2e^{2kt}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-2e^{2kt}\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{RD}x(t)\\&+2e^{2kt}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{RA}\boldsymbol{g}(x(t))\\&+2e^{2kt}|\dot{\boldsymbol{x}}(t)|^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(|\alpha|+|\beta|)|g(x(t-\tau(t)))|\end{aligned}\quad(22)$$

根据引理4和引理5, 我们对(16)和(22)中带有绝对值的部分进行变换,

$$\begin{aligned}&-m\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))g(x(t-\tau(t)))\\&\quad+2|\boldsymbol{x}(t)|^{\mathrm{T}}P(|\alpha|+|\beta|)|g(x(t-\tau(t)))|\\&\leqslant|\boldsymbol{x}(t)|^{\mathrm{T}}P(|\alpha|+|\beta|)\frac{1}{m}(|\alpha|+|\beta|)^{\mathrm{T}}P|x(t)|\\&\leqslant n\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P(|\alpha|_S+|\beta|_S)\frac{1}{m}(|\alpha|_S+|\beta|_S)^{\mathrm{T}}Px(t)\end{aligned}\quad(23)$$

$$\begin{aligned}&-m\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(x(t-\tau(t)))g(x(t-\tau(t)))\\&\quad+2|\dot{\boldsymbol{x}}(t)|^{\mathrm{T}}R(|\alpha|+|\beta|)|g(x(t-\tau(t)))|\\&\leqslant|\dot{\boldsymbol{x}}(t)|^{\mathrm{T}}R(|\alpha|+|\beta|)\frac{1}{m}(|\alpha|+|\beta|)^{\mathrm{T}}R|\dot{x}(t)|\\&\leqslant n\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)R(|\alpha|_S+|\beta|_S)\frac{1}{m}(|\alpha|_S+|\beta|_S)^{\mathrm{T}}R\dot{x}(t)\end{aligned}\quad(24)$$

其中, $|\alpha|_S=\mathrm{diag}\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_{i1}|,\sum_{i=1}^{n}|\alpha_{i2}|,\cdots,\sum_{i=1}^{n}|\alpha_{in}|\right)$, $|\beta|_S=\mathrm{diag}\left(\sum_{i=1}^{n}|\beta_{i1}|,\sum_{i=1}^{n}|\beta_{i2}|,\cdots,\sum_{i=1}^{n}|\beta_{in}|\right)$.

令 $\xi(t)=[x^{\mathrm{T}}(t)\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau)\quad g^{\mathrm{T}}(x(t))\quad \dot{x}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$, 由(16)—(18)、(21)—(24), 可得

$$\dot{V}(x(t))\leqslant e^{2kt}\xi^{\mathrm{T}}(t)\Phi\xi(t)\quad(25)$$

其中,

$$\Phi=\begin{bmatrix}\Phi_1 & e^{-2k\tau}Z & 0 & PA & -DR\\ * & \Psi_{22} & e^{-2k\tau}Z & 0 & 0\\ * & * & \Psi_{33} & 0 & 0\\ * & * & * & -Y & A^{\mathrm{T}}R\\ * & * & * & * & \Phi_5\end{bmatrix},\quad(26)$$

$\Phi_1=2k\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{PD}+\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2-e^{-2k\tau}\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{LYL}+\boldsymbol{P}(|\alpha|_S+|\beta|_S)\frac{n}{m}(|\alpha|_S+|\beta|_S)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$, $\Phi_5=\tau^2\boldsymbol{Z}-2\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}(|\alpha|_S+|\beta|_S)\frac{n}{m}(|\alpha|_S+|\beta|_S)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}$.

因此, 只要满足 $\Phi<0$, 这也意味着 $\dot{V}(x(t))\leqslant 0$. 对 Φ 使用 schur 补定理, 则可以得到式(12), 即 $\Psi<0$ 时, $\dot{V}(x(t))\leqslant 0$.

由于 $\dot{V}(x(t))\leqslant 0$, 我们可以得到

$$V(x(t))\leqslant V(x(0))\quad(27)$$

因此, 有

$$\begin{aligned}V(x(0))\leqslant&\lambda_M(P)\|\phi\|^2+\lambda_M(\boldsymbol{Q}_1)\int_{-\tau(0)}^{0}x^{\mathrm{T}}(s)x(s)\mathrm{d}s\\&+\lambda_M(\boldsymbol{Q}_2)\int_{-\tau}^{0}x^{\mathrm{T}}(s)x(s)\mathrm{d}s\\&+\tau\lambda_M(\boldsymbol{Z})\int_{-\tau}^{0}\int_{\theta}^{0}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\end{aligned}\quad(28)$$

根据引理1和3, 对式(28)中的 $\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)\dot{x}(s)$ 项进行处理,

$$\begin{aligned}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)\dot{x}(s)\leqslant&3(\lambda_M(\boldsymbol{DD})+\lambda_M(A^{\mathrm{T}}A)\lambda_M(L^2)\\&+\lambda_M(|\alpha|^{\mathrm{T}}|\alpha|)\lambda_M(L^2)\\&+\lambda_M(|\beta|^{\mathrm{T}}|\beta|)\lambda_M(L^2))\|\phi\|^2\end{aligned}\quad(29)$$

因此, 我们可以得到

$$\boldsymbol{V}(x(0))\leqslant\Upsilon\|\phi\|^2\quad(30)$$

其中,

$$\begin{aligned}\Upsilon=&\lambda_M(P)+\tau\lambda_M(Q_1)+\tau\lambda_M(Q_2)+3\tau^3\lambda_M(Z)(\lambda_M(DD)\\&+\lambda_M(A^{\mathrm{T}}A)\lambda_M(L^2)+\lambda_M(|\alpha|^{\mathrm{T}}|\alpha|)\lambda_M(L^2)\\&+\lambda_M(|\beta|^{\mathrm{T}}|\beta|)\lambda_M(L^2))\end{aligned}$$

同时, 可知

$$V(x(t))\geqslant e^{2kt}x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)\geqslant e^{2kt}\lambda_m(P)\|x(t)\|^2\quad(31)$$

则由(27)、(30)和(31)得,

$$\|x(t)\|=\|z(t)-z^*\|\leqslant\sqrt{\frac{\Upsilon}{\lambda_m(P)}}\|\phi\|e^{-kt}\quad(32)$$

因此, 系统(10)或(11)是全局指数稳定的, 也就是系统(1)是全局指数稳定的.

注 2 从公式(12)可以看出, 由于在 Ψ_{22} 中存在 $-2e^{-2k\tau}\boldsymbol{Z}$ 项, 所以当时滞变化率 $\mu>1$ 时, 定理1也可以在一定程度内保证系统稳定. 因此, 放松了对时滞变化率 μ 的要求.

当时滞变化率 μ 未知时, 我们给出相应的推论.

推论 1 在假设1的条件下, 并且满足 $0\leqslant\tau(t)\leqslant\tau$, 存在正定对角矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{Y}$, 正定对称矩阵 $\boldsymbol{Z}$, 及正数 k 和 m, 使下面的矩阵不等式(33)成立, 则系统(10)或(11)是全局指数稳定,

$$\Xi=\begin{bmatrix}\Xi_{11} & e^{-2k\tau}Z & 0 & PA & -DR & 0 & \Psi_{17}\\ * & \Xi_{22} & e^{-2k\tau}Z & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & \Psi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & -Y & A^{\mathrm{T}}R & 0 & 0\\ * & * & * & * & \Psi_{55} & \Psi_{56} & 0\\ * & * & * & * & * & -\frac{m}{n}I & 0\\ * & * & * & * & * & * & -\frac{m}{n}I\end{bmatrix}<0\quad(33)$$

其中, $\Xi_{11}=2kP-2PD+Q_2-e^{-2k\tau}Z+LYL$, $\Xi_{22}=-2e^{-2k\tau}Z+2mLL$, 其余参数与定理 1 中相同.

证明　在选取 Lyapunov-Krasovskii 泛函时, 令 $Q_1=0$. 其余证明过程与定理 1 相似.

4　数值例子

为了验证本文得到的稳定性判据的有效性, 我们给出了一个数值例子.

考虑模型结构为(1)的 FCNN, 具体参数如下:

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}-0.25 & 0.375\\ -0.4 & -0.5\end{bmatrix},$$

$$\alpha=\begin{bmatrix}0.03125 & -0.03125\\ 0.03125 & 0.03125\end{bmatrix}, \beta=\begin{bmatrix}0.03125 & 0.03125\\ -0.03125 & 0.03125\end{bmatrix}$$

$f_i(x_i)=(|x_i+1|+|x_i-1|)/2$, $i=1,2$. 偏置量 $I_1=I_2=1$, $u_1=u_2=1$, $\tau(t)=1.25\sin t$, $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 单位矩阵. 经过计算的得到 $\boldsymbol{L}$ 为单位阵.

表 1　当 $\tau=1.25$ 时, 可允许的最大 k 值

	$\mu=0$(定常时滞)	$\mu=0.1$	$\mu=0.5$	未知 μ
文献[9]的方法	$k=0.0823$	$k=0.0760$	$k=0.0760$	——
本文的方法	$k=0.1910$	$k=0.1820$	$k=0.1337$	$k=0.1214$

当 $\tau=1.25$, 时滞变化率 μ 取不同值时, 表 1 给出了应用本文所提判据和文献[9]的所得到的最大可允许指数收敛率. 我们可以明显的看出, 我们的结果是好于文献[9]的, 即可以允许更大的指数收敛率. 对于文献[7]和[8]中的 M-矩阵方法, 以及文献[10]中的代数不等式方法, 均无法判断上面例子的稳定性.

5　结论

本文提出了一种新的基于 LMI 技术的时变时滞模糊细胞神经网络的时滞依赖全局指数稳定性的充分条件. 在本文中, 通过对带有绝对值运算的连接权矩阵的进行处理, 将其转化为平方项进行运算, 从而得到了一种新颖的克服了由于忽略连接权矩阵中元素的符号所引起的保守性的结果. 同时本文的结果也考虑了时滞变换率 $\tau(t)\geqslant 1$ 时的情况. 仿真结果已经证明了本文所提判据的有效性.

参考文献:

[1] Yang T, Yang L B, Wu C W, et al. Fuzzy cellular neural networks: theory[C]. Proceedings of IEEE International Workshop on Cellular Neural Networks and Applications, Seville, 1996. 181-186.

[2] Yang T, Yang L B, Wu C W, et al. Fuzzy cellular neural networks: applications[C]. Proceedings of IEEE International Workshop on Cellular Neural Networks and Applications, Seville, 1996. 225-230.

[3] Yang T, Yang L B. The global stability of fuzzy cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits Systems I 1996, 43(10): 880-883.

[4] 季策, 张化光, 关焕新. 多时滞 Cohen-Grossberg 神经网络鲁棒稳定性的新判据[J]. 电子学报, 2007, 35(1): 135-139.

Ji Ce. Zhang Huaguang, Guan Huanxin. New criteria for robust stability of Cohen-Grossberg neural networks with multiple delays[J]. Chinese Journal of Electronics, 2007, 35(1): 135-139. (in Chinese)

[5] Wang Z S, Zhang H G. Global asymptotic stability of cellular neural networks with multiple delays[J]. Progress in Natural Science, 2006, 16(2): 163-168.

[6] Wang Z S, Zhang H G. LMI-based criteria for globally asymptotic stability of cellular neural networks with multiple delays[J]. Chinese Journal of Electronics, 2007, 7(1): 111-114.

[7] Liu Y, Tang W. Exponential stability of fuzzy neural networks with constant and time-varying delays[J]. Physics Letters A, 2004, 323(3-4): 224-233.

[8] Zhang Q H, Xiong R G. Global asymptotic stability of fuzzy cellular neural networks with time-varying delays[J]. Physics Letters A, 2008, 327(22): 3971-3977.

[9] Yuan K, Cao J D, Deng J M. Exponential stability and periodic solutions of fuzzy cellular neural networks with time-varying delays[J]. Neurocomputing. 2006, 69(13-15): 1619-1627.

[10] Zhong S-M, Long Y-H, Liu X-W. Exponential stability criteria of fuzzy cellular neural networks with time-varying delays[C]. Proceedings of the Fifth International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Dalian, 2006. 4144-4148.

[11] Chen L, Zhao H Y. Stability analysis of stochastic fuzzy cellular neural networks with delays[J]. Neurocomputing. 2008, 72(1-3): 436-444.

[12] Hou Y, Liao T, Yan J. Stability analysis of Takagi-Sugeno fuzzy cellular neural networks with time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, Cybernetics, Part-B. 2007, 37(3): 720-726.

[13] Gu K Q, Kharitonov V, Chen J. Stability of time-delay systems[M]. Cambridge, MA: Birkhauser, 2003.

[14] He Y, Wu M, She J H. Delay-dependent exponential stability of delayed neural networks with time-varying delay[J]. IEEE Transactions on Circuits Systems II 2006, 53(7): 553-557.

[15] Wang Z S, Zhang H G, Yu W. Robust exponential stability analysis of neural networks with multiple time delays[J]. Neurocomputing, 2007, 72(13-15): 2534-2543.

[16] Wang S T, Wang M. A new detection algorithm (NDA) based on fuzzy cellular neural networks for white blood cell detection[J]. IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine, 2006, 10(1): 5-10.

作者简介:

刘振伟 男, 1981 年 10 月生于辽宁锦州, 于 2004 年考入东北大学控制理论与控制工程专业攻读硕士研究生, 现为东北大学信息学院在读博士研究生. 主要研究方向为模糊控制、神经网络、非线性控制以及时滞系统等.

E-mail: jzlzw@ 126. com

张化光 男, 1959 年 5 月生于吉林省吉林市, 东北大学电气自动化研究所所长, 教育部"长江学者"奖励计划特聘教授, 博士生导师. 主要研究方向为神经网络及模糊自适应控制等. 曾获国家自然科学基金、国家杰出青年科学基金等多项奖励, 在国内外权威杂志及重要会议上发表论文 300 余篇.